

© Georgios Gonas, Erkan Gürsoy

Schriftliche Rechenverfahren international

1. Allgemeines / Wie die Informationen zu lesen sind

Im Rahmen von Lehrerfortbildungen machten Mathematiklehrkräfte uns darauf aufmerksam, dass ein systematischer Überblick zu den schriftlichen Rechenverfahren in den verschiedenen Ländern als Grundlage für ihren Unterricht sehr wertvoll sei. Diesem Wunsch kommen wir hiermit nach.

Das Material, das durch Einzelgespräche mit Seiteneinsteigerinnen und Seiteneinsteigern entstanden ist, bietet (Mathematik-)Lehrkräften einen schnellen Einblick und kann als Hilfestellung in der Grundschule und in der Übergangsphase zur Sekundarstufe I genutzt werden, um auf die mathematischen Ressourcen oder Schwierigkeiten von Seiteneinsteigerinnen und Seiteneinsteigern eingehen zu können. Das Material kann aber auch im regulären Unterricht ohne Seiteneinsteiger besprochen werden, mit dem Ziel, vielfältige Lösungswege zu diskutieren (Prediger 2004).

Es wird in tabellarischer Form präsentiert und verdeutlicht die schriftlichen Rechenverfahren der vier Grundrechenarten einzelner Länder. In der linken Spalte befindet sich die Rechnung und in der rechten Spalte eine kurze stichpunktartige Erklärung dazu. Bei großen Unterschieden werden zusätzlich ausführlichere Angaben gemacht. Die aufgelisteten Länder sind alphabetisch sortiert.

Die Liste ist noch nicht abgeschlossen, weitere Länder werden in den nächsten Monaten hinzugefügt. Informationen zu Ländern, die hier noch nicht aufgeführt sind, können gerne per Mail an georgios.gonas@stud.uni-duisburg-essen.de und erkan.guersoy@uni-due.de mitgeteilt werden. Die Vorschläge werden dann in die Liste aufgenommen.

2. Schriftliche Rechenverfahren in Deutschland

Die schriftlichen Rechenverfahren der vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden viele Jahre in dieser traditionellen und normativen Form gelehrt und gelernt.

Hierbei spielt das Dezimalsystem eine große Rolle.

1. Addition: „Addieren“ bzw. „Zusammenzählen“ von Zahlen/Umkehroperation ist die Subtraktion
2. Subtraktion: „Abziehen“ bzw. „Ergänzen“ von Zahlen (Entbündelung, Borgeverfahren)/Umkehroperation ist die Addition
3. Multiplikation: „Malnehmen“ bzw. „Vervielfachen“ von Zahlen/Umkehroperation ist die Division
4. Division: „Teilen“ von Zahlen/Umkehroperation ist die Multiplikation

Deutschland

<p style="text-align: center;"><u>Addition:</u></p> <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">H</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Z</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">E</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">4</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">+</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">4₁</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> </table>			H	Z	E				4	3	9			+	2	4 ₁	6				6	8	5		<ul style="list-style-type: none"> Beide Summanden werden stellenweise untereinander aufgeschrieben. Pluszeichen befindet sich auf der linken Seite. <u>Notationsunterschied:</u> Der Übertrag unter den Summanden. 																																																
		H	Z	E																																																																					
		4	3	9																																																																					
	+	2	4 ₁	6																																																																					
		6	8	5																																																																					
<p style="text-align: center;"><u>Subtraktion:</u></p> <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">H</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Z</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">E</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">-</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1₁</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5₁</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> </table>			H	Z	E				5	2	8			-	1 ₁	5 ₁	9				3	6	9		<ul style="list-style-type: none"> Subtrahend stellenweise unter den Minuenden aufschreiben. Minuszeichen befindet sich auf der linken Seite. <u>Notationsunterschied:</u> Der Übertrag unter den Subtrahenden. <u>Verwendung des Borgeverfahrens</u> 																																																
		H	Z	E																																																																					
		5	2	8																																																																					
	-	1 ₁	5 ₁	9																																																																					
		3	6	9																																																																					
<p style="text-align: center;"><u>Multiplikation:</u></p> <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">H</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Z</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">E</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">H</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Z</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">E</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">•</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">+</td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">+</td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td></tr> </table>	H	Z	E		H	Z	E	2	6	9	•	1	3	3			2	6	9	0	0	+				8	0	7	+				8	0	7			3	5	7	7	7	<ul style="list-style-type: none"> Der Multiplikator wird links und der Multiplikand rechts aufgeschrieben (d.h. die Faktoren werden nebeneinander aufgeschrieben). Multiplikationszeichen ist ein „Malpunkt“, welches sich zwischen den beiden Faktoren befindet. Beginn mit den Hundertern (H), dann mit den Zehnern (Z), Ende mit den Einern (E). <u>Notationsunterschied:</u> Der Übertrag wird nicht aufgeschrieben. Die Teilergebnisse werden addiert. 																														
H	Z	E		H	Z	E																																																																			
2	6	9	•	1	3	3																																																																			
		2	6	9	0	0																																																																			
+				8	0	7																																																																			
+				8	0	7																																																																			
		3	5	7	7	7																																																																			
<p style="text-align: center;"><u>Division:</u></p> <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">ZT</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">T</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">H</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Z</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">E</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">H</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Z</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">E</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">Z</td><td style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">E</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">:</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">5</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">6</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">=</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">2</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">-</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">1</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">-</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">3</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">9</td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">8</td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black; text-align: center;">0</td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td><td style="border: 1px solid black;"></td></tr> </table>	ZT	T	H	Z	E		H	Z	E		Z	E	1	5	3	6	3	:	5	6	9	=	2	7	-	1	1	3	8										3	9	8									-	3	9	8												0								<ul style="list-style-type: none"> Der Dividend wird links und der Divisor rechts aufgeschrieben. Divisionszeichen ist der bekannte „Doppelpunkt“. Die Teilergebnisse werden subtrahiert. Das Endergebnis steht neben dem Gleichheitszeichen.
ZT	T	H	Z	E		H	Z	E		Z	E																																																														
1	5	3	6	3	:	5	6	9	=	2	7																																																														
-	1	1	3	8																																																																					
		3	9	8																																																																					
	-	3	9	8																																																																					
				0																																																																					

Gesetz: Konstanz der Differenz

Dieses Gesetz verändert sowohl den Minuenden als auch den Subtrahenden gleichsinnig, das heißt obwohl zu beiden Komponenten die gleiche Zahl bzw. der gleiche Wert addiert oder subtrahiert wird, bleibt die Differenz der Komponenten trotzdem gleich.

Beispiel:

$a - b = (a \pm n) - (a \pm n)$	$10 - 5 = 5$ $(10 - 2) - (5 - 2) = 8 - 3 = 5$
---------------------------------	--

<u>Subtraktion</u>			
	H	Z	E
	5 ⁴ ¹⁰	2 ¹ ¹⁰	8 ¹⁰
-	1	5	9
<hr/>			
	3	6	9

- Subtrahend stellenweise unter den Minuenden aufschreiben.
- Minuszeichen befindet sich auf der linken Seite.
- Notationsunterschied: Der Übertrag über den Minuenden .
- Gesetz: Konstanz der Differenz

Beide Verfahren (Borgeverfahren und Gesetz der Konstanz der Differenz) sind laut Lehrplan zulässig. Das Gesetz der Konstanz der Differenz ist im Vergleich zum Borgeverfahren ein unübersichtlicheres und komplexeres Verfahren, wo auch die Fehlerquote der Schülerinnen und Schüler sehr hoch ist. Aus diesem Grund wird das Borgeverfahren in der Primarstufe bevorzugt.

3. Schriftliche Rechenverfahren im Überblick

Addition

Übertrag über den Summanden	Übertrag unter der Summe	Übertrag unter den Summanden	Übertrag über die Summe	Pluszeichen auf der rechten Seite	Pluszeichen auf der linken Seite
Algerien Bulgarien Irak Mexiko Portugal Russland Türkei Ungarn	England Frankreich Spanien	China Deutschland Indien Indien (Dorf)	Griechenland	Ägypten Irak	Algerien Bulgarien China Deutschland Frankreich Griechenland Indien Indien (Dorf) Kroatien Mexiko Portugal Russland Spanien Türkei Ungarn

Subtraktion

Übertrag über den Minuend	Übertrag unter den Subtrahenden	Übertrag über die Differenz	Übertrag unter die Differenz	Minuszeichen auf der rechten Seite	Minuszeichen auf der linken Seite	Subtraktive Sprechweise (Borgeverfahren)
Algerien Bulgarien England Mexiko Portugal Russland Türkei	China Deutschland Indien Ungarn	Griechenland Indien (Dorf)	Frankreich Spanien	Ägypten Irak	Algerien Bulgarien China Deutschland England Frankreich Griechenland Indien Indien (Dorf) Kroatien Mexiko Portugal Russland Spanien Türkei Ungarn	Deutschland England Irak Mexiko Russland

Multiplikation

Faktoren untereinander	Faktoren nebeneinander	Verwendung „x“ als Rechenoperation	Verwendung des Malpunktes als Rechenoperation	Malzeichen „x“ auf der rechten Seite	Malzeichen „x“ auf der linken Seite	Malzeichen in der Mitte
Ägypten Algerien China England Griechenland Indien Irak Mexiko Spanien Portugal Türkei	Bulgarien Deutschland Frankreich Kroatien Russland Ungarn	Ägypten Algerien China England Frankreich Griechenland Indien Indien (Dorf) Irak Mexiko Portugal Spanien Türkei	Bulgarien Deutschland Kroatien Russland Indien Ungarn	Ägypten Irak	Algerien China England Griechenland Indien Indien (Dorf) Mexiko Portugal Spanien Türkei	Bulgarien Deutschland Frankreich Kroatien Russland Ungarn

Division

Verwendung von Doppelpunkt als Rechenoperation	Verwendung von senkrechten und waagerechten Strichen als Rechenoperation	Ergebnis nach dem Gleichheitszeichen	Ergebnis unter dem Divisor	Ergebnis über den Dividenden	Dividend und Divisor untereinander
Bulgarien China Deutschland Kroatien Ungarn	Ägypten Algerien England Frankreich Griechenland Indien Indien (Dorf) Irak Mexiko Portugal Russland Spanien Türkei	Bulgarien China Deutschland Kroatien Ungarn	Algerien Frankreich Griechenland Portugal Russland Spanien Türkei	England Indien Indien (Dorf) Irak Mexiko	Ägypten

4. Alphabetische und detaillierte Darstellung der einzelnen Länder

- [Ägypten](#)
- [Algerien](#)
- [Bulgarien](#)
- [China](#)
- [Deutschland](#)
- [England](#)
- [Frankreich](#)
- [Griechenland](#)
- [Indien](#)
- [Irak](#)
- [Kroatien](#)
- [Mexiko](#)
- [Portugal](#)
- [Russland](#)
- [Spanien](#)
- [Türkei](#)
- [Ungarn](#)

Literatur

- Arbeiter, J.: *Algorithmen: schriftliche Rechenverfahren*. (1974).
- Gericke, H.: *Mathematik im Orient*. Springer Verlag. (Berlin 1984).
- Gericke, H.: *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*. Marixverlag. (Wiesbaden 2005).
- Lörcher, Gustav A.: *Mathematik mit Migrantenkinder*, hrsg. V. der RAA Hauptstelle Essen NRW → Online unter <http://www.raa.de/matmatmi.html>.
- Prediger, S.: „Darf man denn das so rechnen?“. *Friedrich Jahresheft* 2004. S.86-89.
- Prediger, S./Schroeder, J.: *Mit der Vielfalt rechnen: Interkulturelles Lernen im Mathematikunterricht*, Basisartikel in: *Mathematik lehren* 116, (2003). S. 4-9.
- Radatz, H./ Schipper, W./ Dröge, R./ Ebeling, A.: *Handbuch für den Mathematikunterricht, 3. Schuljahr: Anregungen zur Unterrichtspraxis*. Schroedel. (1999).
- Selter, C./ Spiegel, H.: *Wie Kinder rechnen*. Klett Verlag. (Leipzig 1997)
- https://www.uni-due.de/imperia/md/content/didmath/ag_jahnke/baltes/intern/folien2dda.pdf

Hilfreicher Links

- <http://www.matheknueller.de/indien-magazin.pdf> [21.11.13]
- http://de.wikipedia.org/wiki/Vedische_Mathematik_%28Rechenmethoden%29 [21.11.13]